8/01/2020.

Άσκηση 4.12 Σελ 131

Κάποιος φεύγει για τη δουλειά του μεταξύ 7:00 και 7:30 π.μ. και φτάνει στο γραφείο του σε 40-50 λεπτά. Αν X είναι ο χρόνος (ώρας) αναχώρησης και Y ο χρόνος μετάβασης στο γραφείο και υποθέσουμε ότι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή, να βρεθεί η πιθανότητα το άτομο να φτάνει στο γραφείο του πριν από τις 8 π.μ.

ΛΥΣΗ

$$f_X(x) = \frac{1}{7{,}5-7} = \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{1/2} = 2 \qquad 7<x<7{,}5$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\frac{5}{6}-\frac{4}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \qquad \frac{4}{6}<y<\frac{5}{6}$$

$$f_{XY}(x,y) \overset{\text{ανεξ}}{=} f_X(x)\, f_Y(y) = 12 \qquad , 7<x<7{,}5 \;,\; \frac{4}{6}<y<\frac{5}{6}$$

$P(X+Y<8)$

$$\left.\begin{array}{l} U = X+Y \\ V = X \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Y = U-V \\ X = V \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}x & \frac{\partial}{\partial v}x \\ \frac{\partial}{\partial u}y & \frac{\partial}{\partial v}y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Άρα $f_{U,V}(u,v) = 12 \qquad 0<v<0{,}5 \;,\; \frac{4}{6}<u-v<\frac{5}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} 0<x<\frac{3}{6} \\ \frac{4}{6}<y<\frac{5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{6}<x+y<\frac{8}{6}$$

$$f_U(u) = \int f_{U,V}(u,v)\,dv$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < v < \frac{3}{6} \\ u - \frac{5}{6} < v < u - \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} < u < \frac{8}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \max\left\{0, u - \frac{5}{6}\right\} < v < \min\left\{\frac{3}{6}, u - \frac{4}{6}\right\}$$

$$\max\left\{0, u - \frac{5}{6}\right\} = \begin{cases} 0 & u < 5/6 \\ u - \frac{5}{6} & u > \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\min\left\{u - \frac{4}{6}, \frac{3}{6}\right\} = \begin{cases} u - \frac{4}{6} & u < \frac{7}{6} \\ \frac{3}{6} & u > \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$f_u(u) = \begin{cases} \int_0^{u - \frac{4}{6}} 12\,dv = 12\left(u - \frac{4}{6}\right) & \frac{4}{6} < u < \frac{5}{6} \\ \int_{u - \frac{5}{6}}^{u - 4/6} 12\,dv = 2 & 5/6 < u < 7/6 \\ \int_{u - 5/6}^{3/6} 12\,dv = 12(8/6 - u) & 7/6 < u < 8/6 \end{cases}$$

$$P(u < 1) = \int_{4/6}^{1} f_u(u)\,du = \int_{4/6}^{5/6} 12\left(u - \frac{4}{6}\right)du + \int_{5/6}^{1} 2\,du =$$

$$= \left[12\left(\frac{u^2}{2} - \frac{4}{6}u\right)\right]_{4/6}^{5/6} + \left[2u\right]_{5/6}^{1} =$$

$$= \left[12\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{36} - \frac{4}{6}\cdot\frac{5}{6}\right) - 12\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{36} - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)\right] + \left[2 - 2\frac{5}{6}\right] =$$

$$= \left[\frac{300}{72} - \frac{240}{36} - \frac{192}{72} + \frac{192}{36}\right] + \frac{12 - 10}{6}$$

$$= \frac{108}{72} - \frac{48}{36} + \frac{2}{6} = \frac{9}{6} - \frac{8}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 5.21 Σελ 184

Με τη βοήθεια του Κ.Ο.Θ. να δειχθεί ότι:

i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{np} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{1}{2}$

ii) $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{x=0}^{n} \frac{n^x}{x!} = \frac{1}{2}$

iii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n [e^{-x} x^{n-1}/\Gamma(n)]\, dx = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{x=0}^{np} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{1}{2} = \lim P(X_1 \leq np) = \lim (X_1 \leq np)$

$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ είναι σ.π. της $B(n,p)$ X_1 τ.μ.

$Y_i \sim B(1,p)$ τότε $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim B(n,p)$

ii) $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{x=0}^{n} \frac{n^x}{x!} = \frac{1}{2} = \lim P(X_2 \leq n)$

$\frac{e^{-n} n^x}{x!}$ η σ.π. Poisson(n) X_2 τ.μ.

$Y_i \sim P(1)$ τότε $\sum Y_i \sim P(n)$

iii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)}\, dx = \frac{1}{2} = \lim P(X_3 \leq n)$

$\frac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)}$ η σ.π.π. Γάμμα$(n,1)$ X_3 τ.μ.

$Y_i \sim$ Γαμμα$(1,1)$ τότε $\sum Y_i \sim$ Γάμμα $(n,1)$

Άσκηση 6,20 Σελ 241

Έστω $x_1, \dots, x_n$ τ.δ. από την κατανομή
$f(x, \theta_1, \theta_2) = (\theta_2\theta_1) x^{(\theta_2 - 1)} e^{-\theta_1 x^{\theta_2}}$ $\quad 0 < x$
όπου $\theta_1, \theta_2 > 0$ σταθερές παράμετροι. Νδο
i) η τ.μ. $x_i^{\theta_2}$ έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \theta_1$
$i = 1, \dots, n$

ii) η τ.μ. $2\sum_{i=1}^{n} x_i^{\theta_2}\theta_1$ έχει κατανομή χ^2_{2n}

iii) η τ.μ. $(n-1)x_1^{\theta_2} / (x_2^{\theta_2} + \dots + x_n^{\theta_2})$ έχει κατανομή $F_{2,2(n-1)}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $Y = x^{\theta_2} \Rightarrow x = y^{1/\theta_2}$

$dx = \frac{1}{\theta_2} y^{1/\theta_2 - 1} dy$

$f_Y(y) = f_X(y^{1/\theta_2}) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \cancel{\theta_2}\theta_1 y^{\frac{1}{\theta_2}(\theta_2 - 1)} e^{-\theta_1 y} \frac{y^{(1/\theta_2 - 1)}}{\cancel{\theta_2}}$

$= \theta_1 e^{-\theta_1 y} y^{\left(1 - \frac{1}{\theta_2}\right) + \left(\frac{1}{\theta_2} - 1\right)} = \theta_1 e^{-\theta_1 y} \quad y > 0$

Άρα $x^{\theta_2} \sim Εκθ(\theta_1)$

ii) $Z = 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\theta_2}$

$m_Z(t) = E(e^{tZ}) = E\left(e^{t2\theta_1 \sum x_i^{\theta_2}}\right) = E\left(e^{t2\theta_1 x_1^{\theta_2}} e^{t2\theta_1 x_2^{\theta_2}} \dots e^{t2\theta_1 x_n^{\theta_2}}\right)$

$\overset{ανεξ.}{=} E\left(e^{t2\theta_1 x_1^{\theta_2}}\right) E\left(e^{t2\theta_1 x_2^{\theta_2}}\right) \dots E\left(e^{t2\theta_1 x_n^{\theta_2}}\right)$

$\overset{ισον.}{=} \left[E\left(e^{t2\theta_1 x^{\theta_2}}\right)\right]^n$

$$M_Z(t) = \left[E\left(e^{t 2\theta_1 x^{\theta_2}}\right)\right]^n \quad \Bigg| \quad = \left[E\left(e^{t 2\theta_1 y}\right)\right]^n = \left[M_Y(2\theta_1 t)\right]^n$$

$$Y = x^{\theta_2}$$

$$\left[M_Y(2\theta_1 t)\right]^n \underset{=}{\overset{Y \sim Exp(\theta_1)}{=}} \left[\frac{\theta_1}{\theta_1 - 2\theta_1 t}\right]^n = \left[\frac{1}{1-2t}\right]^n = (1-2t)^{-n}$$

$$t < 1/2$$

Άρα η ροπογεννήτρια της χ^2_{2n} ή Γάμμα $(n, 2)$

$Z \sim \chi^2_{2n}$

(iii) $\dfrac{(n-1)\, x_1^{\theta_2}}{\sum_{i=2}^{n} x_i^{\theta_2}}$

Ξέρουμε ότι $x_i^{\theta_2} \sim Exp(\theta_1) = $ Γάμμα $(1, 1/\theta_1)$

$2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\theta_2} \sim \chi^2_{2n}$ άρα $2\theta_1 \sum_{i=2}^{n} x_i^{\theta_2} \sim \chi^2_{2(n-1)}$

οπότε η $2\theta_1 x_1^{\theta_2} \sim \chi^2_2$

Ανεξάρτητες $\quad 2\theta_1 x_1^{\theta_2} \sim \chi^2_2$

$\qquad\qquad\quad 2\theta_1 \sum_{i=2}^{n} x_i^{\theta_2} \sim \chi^2_{2(n-1)}$

Άρα $\dfrac{2\theta_1 x_1^{\theta_2} / 2}{2\theta_1 \sum_{i=2}^{n} x_i^{\theta_2} / 2(n-1)} \sim F_{2, 2(n-1)}$

Άσκηση 6.25 σελ 242

Να βρεθεί η κατανομή της μέσης τιμής $\bar{X}$ ενός τ.δ. όταν ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα είναι:

α) $B(k,p)$

β) $P(\lambda)$

γ) $Εκθ(\lambda)$

ΛΥΣΗ

α) $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $B(k,p)$

Δυνατές τιμές $x_i : 0, 1, \dots, k$

$$P(X_i = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{k-x}$$

Έχουμε $X_i \sim B(k,p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(nk, p)$

Άρα η τ.μ. $\Sigma X_i = Y \sim B(nk, p)$ με δυνατές τιμές $0, 1, \dots, nk$

με σ.π $P(Y=y) = \binom{nk}{y} p^y (1-p)^{nk-y}$ $\quad y = 0, \dots, nk$

Η τ.μ. $\bar{X}$ έχει δυνατές τιμές $0, 1/n, \dots, \frac{nk}{n}$ με αντίστοιχες πιθανότητες

β) $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $P(\lambda)$

Δυνατές τιμές : $0, 1, \dots$

$$P(X_i = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Όταν $X_i \sim P(\lambda)$ τότε $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n \cdot \lambda)$

Η τ.μ. $\sum X_i = Y \sim P(n\lambda)$ δυνατές τιμές: $0, 1, \ldots$

με σ.π.

$$P(Y=y) = \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \ldots$$

Η τ.μ. $\bar{X}$ έχει δυνατές τιμές $0, 1/n, \ldots$

γ) Η Εκθετική είναι συνεχής δεν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο

$X_i \sim Εκθ(\lambda) \equiv Γάμμα(1, 1/\lambda)$ Τα αποδεικνύουμε με χρήση ροπογεννητριών

$\sum X_i \sim Γάμμα(n, 1/\lambda)$

$\frac{1}{n}\sum X_i \sim Γάμμα(n, \frac{1}{n\lambda})$

Άσκηση 6,27 Σελ 243

Να βρεθούν οι κατανομές του δειγματικού εύρους και δειγματικού μέσο-εύρους για ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από μία ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-a, a)$

ΛΥΣΗ

Δειγματικό Εύρος: $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ $\quad \max X_i = X_{(n)}$

Δειγματικό Μέσο-Εύρος: $U = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ $\quad \min X_i = X_{(1)}$

$X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $U(-a, a)$

$f_X(x) = \frac{1}{2a}, \quad -a < x < a$

$$f_{X_{(1)}X_{(n)}}(x,y) \overset{X_1,\ldots,X_n \text{ συνεχ.}}{=} n(n-1)\left[F_X(y) - F_X(x)\right]^{n-2} f_X(x) f_X(y)$$

όπου $F_X(x) = \int_{-a}^{x} \frac{1}{2a}\, dy = \frac{x+a}{2a}, \quad -a < x < a$

$$f_{X(1)X(n)}(x,y) = \frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}}{(2a)^n} \qquad \begin{matrix} -a<x<a \\ -a<y<a \\ x<y \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} R = X(n) - X(1) \\ U = \frac{X(1)+X(n)}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} R = X(n) - X(1) \\ 2U = X(1)+X(n) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} X(n) = R + X(1) \\ 2U = X(1) + R + X(1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} X(n) = R + X(1) \\ X(1) = \frac{2U-R}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} X(n) = \frac{R}{2} + U \\ X(1) = U - \frac{R}{2} \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{U,R}(u,r) = \frac{n(n-1)\cdot r^{n-2}}{(2a)^n} \quad ,(u,r)\in T$$

$$T = \left\{(u,r) : \begin{matrix} -a < u - \frac{r}{2} < a \\ -a < u + \frac{r}{2} < a \\ 0 < r < 2a \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} -a < x_1 < a \\ -a < x_n < a \end{matrix}\right\} \Rightarrow -a < u < a$$

$$-2a < X(1) + X(n) < 2a$$
$$0 < X(n) - X(1) < 2a$$

$$\left.\begin{matrix} -u-a < -\frac{r}{2} < a-u \\ \\ -u-a < \frac{r}{2} < a-u \\ \\ 0<r<2a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 2(u-a) < r < 2(u+a) \\ \\ -2(u+a) < r < 2(a-u) \\ \\ 0 < r < 2a \end{matrix}$$

$\Rightarrow \max\{0, -2(u+a), 2(u-a)\} < r < \min\{2a, 2(a+u), 2(a-u)\}$

Για το $-2(u+a)$:	Για το $2(u-a)$:
$-a<u<a$	$-a<u<a$
$-2a<2u<2a$	$-2a<2u<2a$
$-2a<-2u<2a$	$-2a-2a<2u-2a<2a-2a$
$-2a-2a<-2u-2a<2a-2a$	$-4a<2(u-a)<0$
$-4a<-2(u+a)<0$	Αρνητικό άρα απορρίπτεται
Αρνητικό άρα απορρίπτεται	

Οπότε το $\max\{0, -2(u+a), 2(u-a)\} = 0$

Άρα $0 < r < \min\{2a, 2(a+u), 2(a-u)\}$

Περιπτώσεις:

1η $-a<u<0$

Τότε $u+a < a-u$ άρα min το $2(u+a)$

2η $0<u<a$

Τότε $u+a > a-u$ άρα min $2(a-u)$

$$f_u(u) = \begin{cases} \int_0^{2(a+u)} f_{u,r}(u,r)\,dr & 0<u<a \\ \int_0^{2(a-u)} f_{u,r}(u,r)\,dr & -a<u<0 \end{cases}$$